



APLICACION DE UNA ESTRATEGIA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS EN NIÑOS

MANUEL AGUILAR VILLAGRÁN Y JOSÉ I. NAVARRO GUZMÁN

Departamento de Psicología
Universidad de Cádiz

Resumen

El desarrollo de estrategias de resolución de problemas matemáticos en alumnos de primaria, puede ayudar no sólo a mejorar la motivación de estos sujetos hacia materia tradicionalmente tan árida, sino generar habilidades metacognitivas que puedan generalizarse más allá del ámbito escolar. En el presente trabajo, se han evaluado las habilidades de un grupo de 98 alumnos de 8 años de edad para resolver problemas aritméticos verbales de una sola operación. Se ha desarrollado un programa específico para el entrenamiento de habilidades de resolución de este tipo de problemas, centrado en medidas heurísticas generales, además de entrenamiento específico en problemas de cambio combinación, comparación, igualación, isomorfismo de medidas y producto cartesiano. El procedimiento sigue una estrategia fundamentada en la psicología cognitiva, en los que se ha tenido en cuenta los aspectos manipulativos, gráficos y simbólicos en el proceso de resolución de problemas y la necesidad de emitir respuesta manifiesta para generar aprendizaje. Finalmente, se han comparado los resultados obtenidos por los alumnos del grupo de entrenamiento respecto a un grupo de control del mismo rango de edad y nivel académico que ha seguido una escolarización regular. Los resultados indican la superior eficacia de un programa de entrenamiento en resolución de problemas aritméticos verbales de una sola operación, frente a estrategias de ensayo y práctica tradicionalmente desarrollada en la escolarización regular.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Matemáticas, Educación Primaria.

Abstract

To develop mathematical problem solving strategies by primary school children, should improve not only to motivational approaches to this topic, but also to generate adequate metacognition skills, increasing the school learning transfer. In this article, we have assessed the arithmetic problem solving skills of 98, 8 years old, primary school children. We have designed an arithmetic problem solving specific training program, focused on heuristic skills, and specific strategies for seven different sort of mathematical problems. Procedure is based on manipulative, graphic and symbolic approach. The training program also considers that learning improves when active response is implemented by the procedure. Experimental group was trained with the program by three months, and their results are compared with an equivalent control group. Results indicate that specific training program significantly improves the arithmetic problem solving skills, compared with a drill and practice teaching approach.

Key words: problem solving, mathematics, primary school children

Introducción

El ámbito del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas constituye uno de los ejemplos más representativos de la orientación centrada en los contenidos de la investigación actual sobre aprendizaje e instrucción. Este ámbito ha originado un amplio volumen de estudios en el que se encuentran implicado psicólogos que utilizan las matemáticas como campo para investigar fundamentos del aprendizaje, del desarrollo y de la enseñanza, y los investigadores que se muestran especialmente interesados en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, extrayendo de la psicología, tanto las ideas como las herramientas de investigación. Una revisión de estos trabajos de investigación es la síntesis publicada por el *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Nesher y Kilpatrick, 1990), el libro de Grouws (1992) y la publicación de Bishop *et al.*, (1996).

El eje principal de este amplio campo de investigación ha recaído en la resolución de problemas matemáticos. Este planteamiento no resulta sorprendente ya que, en la actualidad, es un hecho comúnmente aceptado que la adquisición y transferencia de las habilidades de resolución de problemas constituye uno de los objetivos fundamentales de la escolarización en general, y de la educación de las matemáticas en particular. En Estados Unidos, por ejemplo, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas ha establecido en su "Agenda for Action", que «la resolución de problemas debe ser el núcleo de las matemáticas escolares» (NCTM, 1989, pág. 1).

El consenso alcanzado con respecto a que el objetivo central de la educación matemática radica en la resolución de problemas, contrasta vivamente con una gran cantidad de datos consistentes de investigación en los que se hace patente que muchos estudiantes no dominan o, al menos no suficientemente, las habilidades requeridas para abordar nuevas tareas y problemas matemáticos, que garanticen una oportunidad razonable de tener éxito (Lester, Garofalo y Kroll, 1989; Rabijewska y Szetela, 1988; Carpenter, *et al.*, 1983; Bethencourt, 1985; De Corte, Verschaffel y Van Coillie, 1988; Aizpún, Casals y Suárez, 1994). Asimismo, la evaluación preliminar de la Educación Primaria realizada por el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1996) refleja los peores resultados en el área de matemáticas; en sexto de Primaria, los alumnos evaluados sólo superan el 50% de las cuestiones planteadas, apareciendo las mayores dificultades en la organización de la información para su tratamiento matemático.

Un detallado estudio sobre las dificultades y graduación de los problemas de estructura aditiva y multiplicativa en alumnos de Educación Primaria puede encontrarse en Martínez (1995). Más recientemente Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) describen las dificultades que presentan los alumnos de Educación Infantil y del primer ciclo de Primaria en función de diversas variables de los problemas de estructura aditiva: tipo de operación, tipo de problema y ubicación de la incógnita.

Hay un consenso general en clasificar los problemas de estructura aditiva en cuatro categorías: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación (Fuson, 1992; Riley, Greeno y Heller, 1983; Verschaffel y De Corte, 1993). La categoría de Cambio (CA), recoge todas las situaciones en que una cantidad sufre incrementos o decrementos. La categoría de Combinación (CO) abarca las situaciones derivadas de una cantidad o de un conjunto constituido por subcantidades o subconjuntos. En general, es la categoría que estudia los problemas que se ocupan de la relación entre la parte y el todo. La categoría de Comparación (CM) contempla todas las situaciones en que una cantidad es comparada con respecto a un referente. Finalmente, la categoría de Igualación (IG) se ocupa de las situaciones en que dos cantidades, tras ser comparadas, se modifican hasta llegar a ser iguales (en el Anexo 1 puede verse un ejemplo de cada problema).

En el caso de los problemas de estructura multiplicativa existe menos acuerdo en la categorización de los distintos tipos de problemas (Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1991;

Puig y Cerdán, 1988; Smith y Weiser, 1995). Generalmente se describen cuatro grandes estructuras: Isomorfismo de Medidas (IM) o repetición de grupos iguales. La categoría de Producto Cartesiano (PC) o Multiplicación Combinatoria recoge los dos tipos de problemas que expresan las posibilidades del producto cartesiano (por ejemplo, ¿cuántos menús distintos obtengo con tres primeros y con cuatro segundos platos?). Los problemas de Escalares Grandes (EG) y Escalares Pequeños (EP) son los que emplean los términos “veces más” y “veces menos” (Anexo 1).

Teniendo en cuenta estos antecedentes, el objetivo de este estudio es diseñar y comprobar la eficacia del entrenamiento específico en resolución de problemas aritméticos en alumnos de Educación Primaria. Para ello se ha elaborado y aplicado un “Programa Instruccional de Resolución de Problemas Aritméticos Escolares Verbales de una Sola Operación” (PIRPAEVSO). Este programa intenta ofrecer al alumno las estrategias necesarias para la resolución adecuada de problemas de estructura aditiva y estructura multiplicativa.

Método

Participantes

El estudio se ha llevado a cabo con 98 alumnos de tercero distribuidos en 4 unidades de dos colegios de Educación Primaria de la ciudad de Cádiz. Se formaron dos grupos elegidos en función del aula en que se encontraban: dos aulas formarían el Grupo Control (49 sujetos; 27 niños y 22 niñas) y dos aulas el Grupo Experimental (49 sujetos; 24 niños y 25 niñas). La edad media es similar (8,10 años) en los dos grupos. El nivel socioeconómico es medio-bajo. El rango de edad del grupo experimental: 8 años, 5 meses a 9 años, 4 meses; y el del grupo control: 8 años, 5 meses a 9 años, 5 meses. En todo momento se respetó el agrupamiento natural de los alumnos en su centro.

Material

El material utilizado en esta investigación se puede clasificar en dos grandes apartados: (1) Baterías de Problemas Aritméticos Elementales Verbales (PAEVSO). Formas A y B. (2) Programa Instruccional en Resolución de Problemas Aritméticos Elementales Verbales de una Sola Operación (PIRPAEVSO) (Aguilar, 1996).

Las baterías (PAEVSO) han sido elaboradas para tomar la medida de la variable dependiente. Se ha realizado siguiendo dos formas paralelas (A y B), que reúnen los requisitos de fiabilidad exigidos. La Forma A es la aplicada antes de la intervención de la variable independiente y la Forma B tras la intervención. Cada forma contiene 62 problemas; 31 con números grandes y 31 con números pequeños (ver Anexo 1). Los ejercicios se distribuyen en problemas de Cambio (6 con números grandes –menor de 10- y 6 con números pequeños –mayor de 10-), Combinación (2 con números grandes y 2 con números pequeños), Comparación (6 con números grandes y 6 con números pequeños), Igualación (6 con números pequeños y 6 con números grandes), Isomorfismo de Medidas (3 con números grandes y 3 con números pequeños), Escalares Grandes (3 con números grandes y 3 con números pequeños), Escalares Pequeños (3 con números grandes y 3 con números pequeños) y Producto Cartesiano (2 con números grandes y 2 con números pequeños).

Los ítems de estas pruebas paralelas se han construido teniendo presentes las siguientes variables: promedios de las palabras de los problemas, complejidad gramatical, tipos de proposiciones asignativas y relacionales.

El programa instruccional (PIRPAEVSO) tiene un componente referido a una heurística general y componentes de entrenamiento en las diversas categorías de problemas (excepto los Escalares Grandes y Pequeños). En la elaboración del programa instruccional se han introducido variables que pueden influir en la resolución de un problema. En este estudio hemos considerado las siguientes variables al construir el programa de entrenamiento: A. Aspectos manipulativos, gráficos y simbólicos: utilización de material manipulativo, diagramas gráficos similares a los usados por Willis y Fuson (1988) y algoritmo que resuelve el problema. B. Utilización de números pequeños: el mismo problema que se presenta con números grandes, es presentado con números pequeños (las operaciones que se realizan con los datos nunca pasan de 20). C. Presentar los problemas con cambios en la secuencia de la aparición de los números. D. Presentar problemas con la proposición interrogativa al final del enunciado o comprendiendo todo el texto del problema. E. Realizar reescritura del enunciado del problema para aumentar su comprensión: son ayudas textuales consistentes en reformular el problema para que sea más comprensible. El programa introductorio de heurística general incide en los cuatro pasos de Polya (1957) sobre la resolución de problemas. Los problemas que en el pretest obtenían un bajo índice de dificultad (< 0.25) no fueron entrenados.

Variables empleadas en el estudio

La variable independiente en este estudio es el programa instruccional PIRPAEVSO. Las variables dependientes se extraen de los resultados de las Formas A y B de las baterías PAEVSO, y son:

- Rendimiento global en problemas formulados con números grandes y pequeños.
- Rendimiento en problemas formulados con números pequeños.
- Rendimiento en problemas formulados con números grandes.
- Rendimiento en cada categoría semántica y tipos de los problemas de Estructura Aditiva y de Estructura Multiplicativa.

Estas variables dependientes se han medido por el número de soluciones correctas. Cada problema ha sido puntuado con 0 ó 1. En los problemas con números grandes se considera acierto cuando el sujeto señala claramente la operación que resuelve el problema. En este tipo de problemas se ofrece en la hoja de respuesta la combinación de los datos que aparecen en el problema con las cuatro operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación y división. En los problemas con números pequeños se considera acierto cuando el alumno escribe la cantidad que resuelve correctamente el problema (resultado final) o bien, cuando expresa la operación que lo resuelve, independientemente de que el cálculo realizado sea erróneo.

Procedimiento

En primer lugar se realizó la evaluación del dominio de los Problemas Aritméticos Elementales Verbales de una Sola Operación al total de los sujetos de la muestra ($N=98$), con la forma A de la Batería PAEVSO. La evaluación fue realizada por dos psicólogos colaboradores y desconocedores de los objetivos finales de la investigación. Fueron entrenados para su correcta aplicación. El orden de aplicación de los problemas se hizo totalmente al azar, con las distintas categorías semánticas y tipos de problemas (con números grandes o pequeños) entremezclados.

Las sesiones fueron aplicadas de forma colectiva a lo largo de dos semanas, a razón de una sesión por día. Cinco sesiones para cada uno de los subgrupos del grupo control y experimental. El horario de aplicación siempre fue el mismo, a partir de la segunda hora de la jornada escolar (las 10.00 horas). En cada sesión los alumnos resolvían individualmente y sin ayuda un promedio de 12 problemas, en un tiempo de veinte a veinticinco minutos.

Tabla 1.- Contenido y duración de las 25 sesiones del Programa Instruccional de Resolución de problemas Aritméticos Verbales de una Sola Operación. (PIRPAEVSO)

SESIÓN	CONTENIDO	DURACIÓN
1.	- Resolución de problemas de una sola operación. Heurística general (La búsqueda de un sombrero o un objeto perdido. Salir de un bosque).	10 min.
2.	- ¿Cómo solucionar un problema de Matemáticas? Los 4 pasos: 1. Comprender el problema (Subrayar la pregunta). 2. Elegir la operación adecuada. 3. Realizar la operación elegida. 4. Ver (comprobar) si la solución es correcta.	15 min
3.	- Entrenamiento manipulativo, gráfico (Diagrama de Cambio) y simbólico de los problemas de Cambio 1, Cambio 2, y Cambio 4.	40 min
4.	- Problemas de Cambio 6 y Cambio 5.	40 min
5.	- Problemas de Cambio 3.	40 min
6.	- Introducción gráfica al esquema "El todo y las partes".	20 min
7.	- Los problemas de Combinación (El todo y las partes). Combinación 1 y 2. Problemas ya resueltos.	20 min
8.	- Modelado de los problemas de Combinación 1 y Combinación 2.	20 min
9.	- Problemas de Combinación 1 y Combinación 2.	25 min
10.	- Introducción manipulativa a los problemas de Comparación (Lámina con diagramas para realizar con fichas manipulativas).	40 min
11.	- Problemas de Comparación 4 y Comparación 3.	30 min
12.	- Problemas de Comparación 2 y Comparación 1.	40 min
13.	- Problemas de Comparación 6 y Comparación 5.	40 min
14.	- Introducción manipulativa a los problemas de Igualación. Lámina con diagramas.	30 min
15.	- Problemas de Igualación 5 e Igualación 2.	25 min
16.	- Problemas de Igualación 6 e Igualación 1.	40 min
17.	- Problemas de Igualación 3 e Igualación 4.	40 min
18.	- Problemas de Isomorfismo de Medidas 1, 2 y 3.	30 min
19.	- Introducción manipulativa a los problemas de Producto Cartesiano 1 y 2 (Juego de Tablero).	45 min
20.	- Problemas de Producto Cartesiano 1 y 2.	30 min
21.	- Repaso de Instrucciones Generales.	10 min
22.	- Repaso general de los problemas por categorías: Cambio, Combinación y Comparación. (Sólo reconocer y usar el diagrama).	10 min
23.	- Repaso general de las categorías de: igualación, isomorfismo de medidas y producto cartesiano.	10 min
24.	- Repaso general de todos los problemas mezclados.	30 min
25.	- Repaso general de todos los problemas mezclados.	30 min

Después de la fase de evaluación inicial, se eligieron dos grupos de clase (completos) como grupo control y otros dos grupos como grupo experimental. La elección de los grupos completos como tales fue totalmente al azar.

Durante la fase de intervención, los sujetos del grupo experimental recibieron un total de 25 sesiones de entrenamiento a razón de dos sesiones por semana de entre 10 y 40 minutos de duración. El período de aplicación fue de tres meses: Octubre a Diciembre (Tabla 1).

Tabla 2.- Resumen de los procesos llevados a cabo en las sesiones de entrenamiento instruccional

FASE MANIPULATIVA	1. Pensando en el problema sin números.
	2. Representando la situación con fichas.
	3. Resolviendo el problema.
FASE DE DIAGRAMAS	1. Elección del diagrama adecuado.
	2. Situación de la incógnita en el diagrama del problema.
	3. Resolviendo el problema.
FASE SIMBÓLICA	1. Elegir la operación adecuada y su representación simbólica.
	2. Comprobar que la solución es adecuada.

Cualquier sesión sigue este esquema general de trabajo:

- Introducción por parte del instructor de los componentes manipulativos.
- Explicación de los componentes gráficos y simbólicos.
- Realización por parte de los sujetos de los demás problemas (en las hojas de las lecciones o sesiones de trabajo). Esta tarea es realizada individualmente, en parejas o en pequeños grupos de cuatro/tres alumnos que es como están agrupados en el aula. Cuando las tareas son realizadas por parejas, éstas son asignadas por el investigador en función de los resultados obtenidos en el pretest. El trabajo en pequeño grupo o en parejas procede de forma que se consiga el mayor número de interacciones entre los sujetos.
- Corrección de la tarea. Cuando la mayoría del grupo ha terminado el trabajo, se realiza la corrección. Esta suele ser colectiva y guiada por el instructor. Se discuten las soluciones aportadas por los alumnos, se crea conflicto cognitivo en el caso de soluciones divergentes entre el alumnado. Se hace especial hincapié en la comprobación de la solución volviendo a leerse la pregunta del problema y comprobando si la solución aportada se corresponde con lo pedido. Se ha tenido especial cuidado en el tratamiento correcto de los errores (véase el resumen en la Tabla 2).

Las sesiones de aplicación a los dos subgrupos experimentales del Programa instruccional fueron realizadas por uno de los autores de esta investigación, a razón de dos sesiones por semana durante el período de aplicación. El grupo control siguió las pautas desarrolladas en el currículum oficial, el tratamiento de los problemas es realizado como aplicación de los contenidos de las lecciones del área de matemáticas y es completado con cuadernos de trabajo complementarios. En la evaluación final posttest se ha aplicado la forma B paralela de la batería de problemas PAEVSO por dos psicólogos y en las mismas condiciones que en el pretest.

Resultados y discusión

Uno de los objetivos de este estudio fue comprobar en qué medida la aplicación de un diseño instruccional en resolución de problemas (PIRPAEVSO) tiene efectos positivos y diferencias significativas en un grupo de sujetos con respecto a otros de control que siguen la práctica escolar habitual. Para ello hemos realizado un análisis de varianza distribuida según cada tipo de problema con el fin de conocer en qué aspectos el PIRPAEVSO resulta más eficaz. Los dos grupos parten con niveles cognitivos matemáticos similares, dado que en el pretest, las diferencias entre grupo experimental y control no son significativas (medias grupo experimental: problemas con números grandes 11.347 (D.T. 4.828) ; problemas con números pequeños: 13.714 (D.T. 5.625); total de problemas: 25.061 (D.T. 9.77). Medias del grupo control: problemas con números grandes 12.8 (D.T. 3.908) ; problemas con números pequeños: 13.678 (D.T. 4.796); total de problemas: 26.4781 (D.T. 8.014).

Tabla 3.- Comparación de los resultados en Problemas de Combinación (CO) entre el grupo experimental y el grupo control. La probabilidad (p) que se ofrece es para el estadístico «t de Student» (CO1= Problemas de Combinación de Tipo 1 con números grandes, CO2 = Problemas de Combinación Tipo 2 con números grandes. CO1P y CO2P= problemas de Combinación Tipo 1 y 2 planteados con números pequeños). Se presentan los valores medios (M) y la desviación típica (DT)

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M.	D.T.	p
CO1	.8913	.315	.8571	.354	0.620
CO1P	.9796	.143	.9348	.251	0.291
CO2	.6957	.415	.3673	.487	<u>0.001**</u>
CO2P	.7391	.444	.4490	.503	<u>0.004**</u>

En los problemas de Combinación 2 (CO2) (ver Tabla 3) encontramos en el posttest diferencias significativas entre el grupo experimental y el grupo control, tanto si el problema es planteado con números grandes como si se hace con números pequeños (con números grandes $F=1.10$; $p<0.001^{**}$; con números pequeños $F=1,28$; $p<0.004^{**}$). Teniendo en cuenta que los problemas de Combinación 1 son problemas muy fáciles, es lógico que las diferencias sólo se presenten en Combinación 2 (encontrar una parte en un problema que presenta el todo y otra parte).

Si analizamos los resultados en los problemas de Cambio (CA) (ver Tabla 4) en el posttest comparando los dos grupos de sujetos, se observan diferencias significativas sólo en algunos de los tipos de problemas de Cambio. Estas diferencias se encuentran en CA2P ($F= 8.18$;

$p < 0.002^{**}$) que es un problema con bajo índice de dificultad y es una diferencia en puntuaciones directas igual a la de la primera aplicación. En los problemas de Cambio 3 con números grandes y pequeños se señala la efectividad del entrenamiento. Los niveles de significatividad son, para CA3, $F=1.14$; $p < 0.006^{**}$; y para CA3P, $F=1.36$; $p < 0.0001^{***}$. El problema de Cambio 3 es un problema de lenguaje inconsistente, el enunciado puede inducir a resolverlo con una suma, cuando se resuelve con una resta. Igualmente las diferencias son significativas en los tipos de Cambio 6 con números grandes y pequeños, las diferencias significativas son mayores en el Cambio 6 con números pequeños (CA6, $F=1.29$; $p < 0.007^{**}$; CA6P, $F=2.77$; $p < 0.004^{**}$). En los problemas de Cambio 6 se pregunta por la situación inicial después de realizar un cambio disminuyendo. El enunciado del problema mueve a realizar la operación contraria a la correcta.

Tabla 4.- Comparación de los resultados en Problemas de Cambio planteados con números grandes (CA) y números pequeños (CAP) entre el grupo experimental y el grupo control en el postest. La probabilidad (p) que se ofrece es para el estadístico «t de Student». Se presentan los valores medios (M) y la desviación típica (DT)

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M	D.T.	p
CA1	.8043	.059	.8367	.053	0.685
CA1P	.9565	.206	.9184	.277	0.446
CA2	.9348	.250	.8776	.331	0.342
CA2P	.9783	.147	.7755	.422	<u>0.002**</u>
CA3	.5870	.498	.3061	.466	<u>0.006**</u>
CA3P	.7826	.417	.3673	.487	<u>0.0001***</u>
CA4	.7174	.455	.6939	.466	0.804
CA4P	.9130	.285	.8571	.354	0.397
CA5	.6739	.474	.4286	.500	<u>0.016*</u>
CA5P	.6739	.474	.5714	.500	0.308
CA6	.7391	.444	.4694	.504	<u>0.007**</u>
CA6P	.9130	.285	.6735	.474	<u>0.004**</u>

Por último, en el problema de Cambio 5 con números grandes también se encuentran diferencias significativas ($F=1.11$; $p<0.016^*$). Aunque estos resultados irían más acordes con lo esperado tras el entrenamiento, si esta diferencia se diera también en Cambio 5 con números pequeños.

A la vista de estos resultados podemos deducir, respecto del entrenamiento de los problemas de Cambio lo siguiente: la aplicación del Programa instruccional resulta efectiva para la mayor parte de los problemas de Cambio (a excepción de Cambio 1 -problema muy fácil- y Cambio 4). La tendencia general de los resultados da a entender que a medida que aumenta la dificultad de los problemas, el entrenamiento es más útil para los alumnos.

Tabla 5.- Comparación de los resultados en Problemas de Comparación planteados con números grandes (CM) y números pequeños (CMP) entre el grupo experimental y el grupo control en el postest. La probabilidad (p) que se ofrece es para el estadístico «t de Student». Se presentan los valores medios (M) y la desviación típica (DT)

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M	D.T.	p
CM1	.7391	.444	.3469	.481	<u>0.0001***</u>
CM1P	.8261	.383	.4898	.505	<u>0.0001***</u>
CM2	.6304	.488	.6939	.466	0.519
CM2P	.8163	.391	.8043	.401	0.883
CM3	.6531	.481	.6087	.493	0.659
CM3P	.8696	.341	.7755	.422	0.233
CM4	.7347	.446	.6522	.482	0.389
CM4P	.8043	.401	.7551	.434	0.567
CM5	.8696	.341	.3878	.492	<u>0.0001***</u>
CM5P	.6304	.488	.2857	.456	<u>0.001**</u>
CM6	.6739	.474	.1633	.373	<u>0.0001***</u>
CM6P	.6087	.493	.3265	.493	<u>0.006**</u>

En los problemas de Comparación (CM) (Tabla 5) las diferencias significativas entre los dos grupos aparecen en los tipos 1, 5 y 6. Son los tipos de problemas de Comparación en los que existe alguna inconsistencia en el lenguaje de su enunciado. Los otros tipos (CM2, CM3 y CM4) que se resuelven con las operaciones que se indican en sus palabras-clave no presentan diferencias significativas. El enunciado del problema parece incidir en la resolución del mismo. Así, las palabras clave orientan las respuestas del niño, haciendo una resolución más intuitiva. El entrenamiento, en cambio, parece que interviene en elementos más abstractos del proceso de resolución. Influiría sobre los procesos representacionales que hacen falta para solucionar el problema de forma correcta.

Tabla 6.- Comparación de los resultados en Problemas de Igualación planteados con números grandes (IG) y con números pequeños (IGP) entre el grupo experimental y el grupo control en el postest. La probabilidad que se ofrece es para el estadístico «t de Student»

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M	D.T.	p
IG1	.5870	.474	.3265	.498	<u>0.011*</u>
IG1P	.7391	.444	.5510	.503	<u>0.056*</u>
IG2	.8043	.401	.6735	.474	0.149
IG2P	.7174	.455	.7755	.422	0.521
IG3	.4783	.505	.3469	.481	0.198
IG3P	.7391	.444	.4695	.504	<u>0.007**</u>
IG4	.4565	.504	.1837	.391	<u>0.004**</u>
IG4P	.5652	.501	.4082	.497	0.129
IG5	.8571	.354	.7828	.417	0.351
IG5P	.7609	.242	.9388	.431	<u>0.016*</u>
IG6	.6739	.474	.6531	.481	0.832
IG6P	.8696	.341	.8980	.306	0.671

En los problemas de Igualación (IG) se dan diferencias significativas en el tipo IG1 ($F=1.10$; $p<0.011^*$), IG1P ($F=1.28$; $p<0.056^*$), IG3P ($F=1.29$; $p<0.007^{**}$) e IG4 ($F=1.66$; $p<0.004^{**}$). Encontramos un tipo de problema que es mejor resuelto por el grupo no entrenado, es el problema de IG5P con una diferencia significativa a favor del grupo control ($F=3.17$; $p<0.016^*$). Puede interpretarse como un problema con un enunciado sencillo y ya resuelto por la mayoría de los sujetos en la primera aplicación. En este caso cabe precisar que el diagrama mediacional utilizado para entrenar este tipo de problemas ha podido crear confusión, más que aclarar, en los alumnos del grupo experimental. Sería, en opinión de Maza (1995), una representación poco transparente para este tipo de problemas.

Tabla 7.- Comparación de los resultados en Problemas de Isomorfismo de Medidas planteados con números grandes (IM) y con números pequeños (IMP) entre el grupo experimental y el grupo control en el postest. La probabilidad (p) que se ofrece es para el estadístico «t de Student». Se presentan los valores medios (M) y la desviación típica (DT)

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M	D.T.	p
IM1	.3696	.488	.3673	.487	0.982
IM1P	.4783	.505	.3061	.466	0.088
IM2	.8696	.341	.1429	.354	<u>0.0001***</u>
IM2P	.8261	.383	.1020	.306	<u>0.0001***</u>
IM3	.4565	.504	.2041	.407	<u>0.009**</u>
IM3P	.6522	.482	.0204	.354	<u>0.0001***</u>

En los problemas de Isomorfismo de Medidas (IM) se dan diferencias significativas en aquellos que se resuelven con la división (partitiva o cotitiva) como son el IM2 y el IM3, tanto cuando se plantean con números grandes como con números pequeños (IM2, $F=1.08$; $p<0.0001^{***}$ IM2P, $F=1.57$; $p<0.0001^{***}$. IM3, $F=1.53$; $p<0.009^{**}$. IM3P, $F=1.86$; $p<0.0001^{***}$). No se encuentran diferencias en los problemas de IM1 que se resuelven con una multiplicación (o también con la suma reiterada). En el curso tercero de Educación Primaria se inicia la multiplicación como suma reiterada; es posible que en el momento de la segunda aplicación todos los sujetos de la muestra estuvieran realizando operaciones de multiplicar y problemas del tipo IM1 que son los más frecuentes en los libros de texto. Es decir la práctica reiterada en este tipo de problemas hace que no aparezcan diferencias significativas entre los dos grupos para los problemas de IM1.

A la luz de estos datos, parece que los tipos de problemas de Isomorfismo de Medidas 2 y 3 son fácilmente entrenables en tercero de Educación Primaria, por lo que su introducción en el currículum y en los libros de texto de los alumnos sería factible. Si consideramos los Índices de Dificultad Corregidos (Aguilar, 1996) en el grupo experimental los problemas de IM2 son los más fáciles de la categoría, estando los problemas de IM1 e IM3 en el mismo nivel de dificultad. En cambio, en el grupo control el problema más fácil es IM1, siendo IM2 e IM3 del mismo nivel de dificultad (muy difíciles). Esta valoración hace del Programa instruccional un procedimiento eficiente cuando el nivel de dificultad es mayor.

Tabla 8.- Comparación de los resultados en Problemas de Producto Cartesiano planteados con números grandes (PC) y con números pequeños (PCP) entre el grupo experimental y el grupo control en el postest. La probabilidad (p) que se ofrece es para el estadístico «t de Student». Se presentan los valores medios (M) y la desviación típica (DT)

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M	D.T.	p
PC1	.4565	.504	.2041	.407	<u>0.009**</u>
PC1P	.6522	.482	.0204	.143	<u>0.0001***</u>
PC2	.6522	.482	.1429	.354	<u>0.0001***</u>
PC2P	.1957	.401	.000	.000	

Aunque los problemas de Producto Cartesiano (PC) son problemas de gran dificultad para alumnos de tercero de Primaria (Martínez, 1995), habíamos considerado que su instrucción podría facilitarse con un material adecuado, por eso recibieron entrenamiento. En estos problemas las diferencias han sido significativas en los dos tipos y tanto con números grandes como con números pequeños, en el caso de PC2P no aparece en la Tabla 8 porque en el grupo control ningún sujeto realizó bien este problema.

Considerando el cómputo global de problemas (PAEVSO), la Tabla 9 presenta las comparaciones globales, considerando las puntuaciones totales de los grupos en los problemas enunciados con números pequeños, con números grandes y el total de problemas.

Si las comparaciones entre los dos grupos se realizan atendiendo al total de problemas, distinguiendo también entre los totales de problemas con números pequeños y con números grandes, las diferencias son altamente significativas lo que sugeriría la efectividad de la aplicación de este diseño instruccional.

La aplicación del programa PIRPAEVSO al grupo de participantes muestra resultados sensiblemente superiores, respecto de un grupo de sujetos que siguen la práctica curricular habitual. No obstante, esta afirmación debe ser matizada pues no todos los resultados alcanzan

la significación estadística esperada. En el cómputo global, las diferencias son significativas entre los problemas aritméticos enunciados con números pequeños, con números grandes y el total de problemas (62) y siempre a favor del grupo experimental. Cuando se analizan las diferencias dentro de las categorías semánticas estudiadas es cuando encontramos variabilidad sobre los resultados esperados. Comenzando por los problemas de Estructura Aditiva (Combinación, Cambio, Comparación e Igualación) puede afirmarse que las diferencias significativas entre los dos grupos se encuentran en los que hemos catalogado como problemas muy difíciles, según los índices de dificultad hallados tras la primera aplicación de la batería PAEVSO. Comentemos también el hecho de que en algunos tipos de problemas de Igualación y en concreto en el problema de Igualación 5 con números pequeños (que es un problema considerado muy fácil en el grupo experimental), las diferencias se encuentran a favor del grupo control. Cabe conjeturar que los sujetos del grupo experimental han considerado este problema como un problema muy fácil y esto les lleva a pensar que debe resolverse de otra manera que la habitual («no pueden ponerme un problema tan fácil»); puede ser que actúen inducidos por el entrenamiento que se ha realizado y que les ha insistido en fijarse en determinados problemas que se resuelven con la operación contraria. Puede ser que, sin proponérselo, el programa instruccional fomente el uso de «palabras-clave» en la fase de comprensión (Kintsch y Greeno, 1985) o en la fase de selección de la operación, según el modelo de De Corte y Verschaffel (1985).

Tabla 9.- Comparación de los resultados entre los grupos experimental y control en el posttest en las variables: Problemas con números pequeños, números grandes y total de problemas

	Experimental		Control		
	M	D.T.	M	D.T.	p
PEQUEÑOS	19.391	4.338	14.122	5.717	<u>0.0001***</u>
GRANDES	18.152	4.877	12.959	6.018	<u>0.0001***</u>
TOTAL	37.543	8.732	27.081	11.041	<u>0.0001***</u>

En los problemas de Estructura Multiplicativa podemos centrarnos en primer lugar en los de Isomorfismo de Medidas; las diferencias se encuentran en IM2 e IM3 tanto con números grandes como con números pequeños. El hecho de no encontrar diferencias en IM1 puede ser debido a la circunstancia de ser un problema trabajado en las fechas de la segunda aplicación según los contenidos de tercero de Educación Primaria y ser un tipo de problema muy común en los libros de texto.

Comparaciones intragrupos

También hemos querido conocer si la aplicación del PIRPAEVSO a un grupo de sujetos muestra resultados sensiblemente superiores en las puntuaciones finales, respecto a las iniciales, en las diversas categorías semánticas de problemas.

Tabla 10.- Comparación Pre-posttest de los resultados en Problemas de Estructura Aditiva para el grupo experimental y el grupo control. Se muestran las medias obtenidas para los problemas planteados con números grandes (CO, CA, CM, IG) y con números pequeños (COP, CAP, CMP, IGP). La probabilidad (p) que se ofrece es para el estadístico «t de Student»

		Grupo experimental		Grupo control	
		Medias	p	Medias	p
Combinación	CO1	.8478/.8913	0.486	.6875/.8542	<u>0.031*</u>
	CO1P	.8478/.9348	0.160	.8958/.9792	0.103
	CO2	.3913/.6957	<u>0.002**</u>	.3333/.9792	0.622
	CO2P	.5000/.7391	<u>0.020*</u>	.5833/.4583	0.135
Cambio	CA1	.8043/.8043	1.000	.9167/.8333	0.209
	CA1P	.9565/.9565	1.000	.8958/.9167	0.710
	CA2	.8913/.9348	0.420	.8333/.8750	0.485
	CA2P	.9348/.9783	0.323	.7500/.7708	0.785
	CA3	.2174/.5870	<u>0.0001***</u>	.0833/.3125	<u>0.006**</u>
	CA3P	.3043/.7826	<u>0.0001***</u>	.4167/.3750	0.622
	CA4	.7391/.7391	0.811	.7292/.6875	0.642
	CA4P	.8478/.9130	0.261	.7708/.8750	0.200
	CA5	.4348/.6739	<u>0.006**</u>	.3125/.4375	0.135
	CA5P	.4330/.6739	<u>0.002**</u>	.4792/.5625	0.322
	CA6	.3261/.7391	<u>0.0001***</u>	.4792/.4792	1.00
	CA6P	.6739/.9130	<u>0.003**</u>	.8333/.6875	0.070
Comparación	CM1	.3913/.7391	<u>0.000***</u>	.2917/.3542	0.473
	CM1P	.4565/.8261	<u>0.000***</u>	.4583/.4792	0.799
	CM2	.6304/.6522	0.785	.6667/.6875	0.811
	CM2P	.7391/.8043	0.473	.5208/.8125	<u>0.001**</u>
	CM3	.5870/.6087	0.844	.6667/.6458	0.785
	CM3P	.8043/.8696	0.411	.8125/.7708	0.598
	CM4	.6522/.6957	0.420	.6875/.7292	0.622
	CM4P	.7826/.8043	0.785	.8750/.7500	0.083
	CM5	.3696/.8696	<u>0.0001***</u>	.2500/.3958	0.070
	CM5P	.3043/.6304	<u>0.001**</u>	.3125/.2917	0.785
	CM6	.1522/.6739	<u>0.0001***</u>	.2083/.1667	0.569
	CM6P	.3043/.6087	<u>0.005**</u>	.4583/.3333	0.159
Igualación	IG1	.3478/.5870	<u>0.010*</u>	.1875/.3333	<u>0.051*</u>
	IG1P	.4565/.7391	<u>0.001**</u>	.4583/.5417	0.252
	IG2	.7826/.8043	0.811	.7500/.6667	0.351
	IG2P	.7174/.7174	1.000	.7708/.7708	1.000
	IG3	.4130/.4783	0.519	.2917/.3333	0.622
	IG3P	.2826/.7391	<u>0.0001***</u>	.4167/.4792	0.537
	IG4	.2609/.4565	<u>0.037*</u>	.2083/.1875	0.799
	IG4P	.2609/.5652	<u>0.003**</u>	.2500/.4167	0.073
	IG5	.7826/.8261	0.569	.7917/.8542	0.0444
	IG5P	.9348/.7609	<u>0.019*</u>	.8333/.9375	0.133
	IG6	.9348/.6739	<u>0.001**</u>	.7500/.6458	0.168
	IG6P	.8478/.8696	0.660	.6458/.8958	<u>0.009**</u>

Tabla 11.- Comparación Pre-posttest de los resultados en Problemas de Estructura Multiplicativa para el grupo experimental y el grupo control. Se muestran las medias obtenidas para los problemas planteados con números grandes (IM, PC) y con números pequeños (IMP, PCP). La probabilidad que se ofrece es para el estadístico «t de Student»

		Grupo experimental		Grupo control	
		Medias	p	Medias	p
Isomorfismo de Medidas	IM1	.2609/.3696	0.168	.1667/.3750	0.011*
	IM1P	.3043/.5783	0.044*	.3542/.3125	0.622
	IM2	.2174/.8696	0.0001***	.1667/.1250	0.569
	IM2P	.2609/.8296	0.0001***	.1667/.1042	0.182
	IM3	.1304/.4565	0.001**	.1042/.1875	0.159
	IM3P	.1087/.6522	0.0001***	.2500/.1458	0.168
Producto Cartesiano	PC1	.0217/.4565	0.0001***	.2083/.2083	1.000
	PC1P	.1087/.6522	0.0001***	.0625/.0208	0.159
	PC2	.1522/.6522	0.0001***	.0833/.1458	0.261/---
	PC2P	.0000/.1957	0.002**	.0000/.000	

En las Tablas 10 y 11 se muestran las comparaciones mediante la prueba de decisión estadística *t*-Student para las puntuaciones obtenidas en el pretest (primera aplicación) y en el posttest (segunda aplicación) en cada uno de los grupos considerados en este estudio.

En los problemas de Combinación, los sujetos del grupo control mejoran significativamente en el tipo de Combinación 1 con números grandes ($p < 0.031^*$) que es un problema fácil o muy fácil; en cambio el grupo experimental mejora significativamente en los dos problemas de Combinación 2, el planteado con números grandes y el enunciado con números pequeños ($p < 0.022^{**}$ y $p < 0.020^*$) que es un problema muy difícil. Cabe señalar que si bien se da una mejora en el grupo control, parece que el programa de entrenamiento seguido es más efectivo para los problemas de Combinación más complejos (CO2 y CO2P).

El grupo experimental mejora significativamente en tres de los tipos de problemas de la categoría de Cambio (CA3, $t = -4.11$; $p < 0.0001^{***}$; CA5, $t = 2.87$; $p < 0.006^{**}$ y CA6, $t = -4.54$; $p < 0.0001^{***}$). Los tres problemas de cambio que han mejorado de manera significativa eran considerados dentro del tipo «muy difíciles» (Martínez, 1995; Aguilar, 1996). En el grupo control no se encuentra ninguna diferencia significativa entre las dos aplicaciones de problemas. De nuevo se confirma la tendencia que indica que el programa instruccional resulta más útil para aquellos problemas más difíciles.

En la categoría de Comparación, nuevamente encontramos que la mejora se da de manera significativa en el grupo experimental. El grupo control mejora en los problemas de Comparación 2 con números pequeños, que es un problema que se resuelve con la misma operación que se plantea en su enunciado; en cambio la mejora en el grupo experimental es significativa en los tres problemas de Comparación que se denominan de lenguaje inconsistente (De Corte; Verschaffel y De Win, 1985), en que el sentido del enunciado plantea una operación contraria a la que lo resuelve en realidad.

En los problemas de Igualación la mejora se presenta significativa en el grupo experimental en los problemas que se consideraban como muy difíciles (IG1 Grande y Pequeño, IG3 Pequeño e IG4 Grande y Pequeño). Llama la atención que en algunos fáciles (IG5 Pequeño e IG 6 Grande)

la diferencia sea significativa pero en el sentido de obtener peores resultados en la segunda aplicación. El grupo control mejora significativamente en los problemas de Igualación 1 con números grandes (IG1, $t = -2,00$; $p < 0,051^*$, problema muy difícil) y en el problema de Igualación 6 con números pequeños (IG6P, $t = -2,72$; $p < 0,009^{**}$) que es fácil.

Las diferencias son claramente significativas en los problemas de Isomorfismo de Medidas en el grupo experimental; sólo en uno de los tipos no se dan diferencias, es en los problema de Isomorfismo de Medidas 1 con números grandes, que es paradójicamente el único que mejora en el grupo control. Los problemas de Isomorfismo de Medidas 1 son introducidos en tercero de Educación Primaria cuando se inicia y afianza la multiplicación y es el problema mayoritariamente contenido en los libros de texto de tercero que hemos analizado (Bujanda, 1993; García, 1993). La familiaridad con el tipo de problema puede ser una explicación de estas diferencias encontradas, como también el que sean frecuentemente entrenados en la enseñanza más tradicional.

En cuanto a los problemas de Producto Cartesiano, el grupo experimental ha mejorado significativamente en los cuatro (PC1, $t = -5,42$; $p < 0,0001^{***}$; PC1P, $t = -6,75$; $p < 0,0001^{***}$; PC2, $t = -5,78$; $p < 0,001^{***}$ y PC2P, $t = -3,31$; $p < 0,002^{**}$). Precisemos que este tipo de problemas no se incluye en los libros y cuadernos que actualmente se utilizan en los centros escolares y por tanto son muy ajenos a la experiencia del niño, existe también cierto consenso en considerar estos problemas como muy difíciles (Nesher, 1988).

Algunas conclusiones

Los resultados obtenidos confirman la eficacia del programa PIRPAEVSO. En general, se han observado diferencias significativas entre las puntuaciones iniciales y finales sobre todo en los problemas que son considerados como difíciles dentro de las diversas categorías semánticas de los problemas objeto de estudio. Cabe señalar que el número de diferencias significativas no se da de forma homogénea en todas las categorías y tipos de problemas. Pero estas diferencias son muy significativas en los resultados globales, considerando los problemas con números pequeños, números grandes y total de problemas.

La toma de conciencia por parte del niño de las distintas categorías semánticas de los problemas de estructura aditiva y multiplicativa y de las estrategias utilizadas para resolverlos adecuadamente, pueden ser desarrolladas de forma progresiva. Esto lleva a la consecuencia lógica de que un entrenamiento de este tipo debe abarcar un período más largo que el desarrollado por nosotros (sólo un trimestre del curso escolar), posiblemente comprendiendo más de un curso escolar y de manera gradual. Su inicio podría encuadrarse, atendiendo a los niveles de dificultad encontrados, en el primer ciclo de la Educación Primaria y continuarse en los dos ciclos siguientes, dejando algunos de los tipos problemas (Escalares Grandes y Pequeños 1 y 2 y Producto Cartesiano 2) para el último ciclo de la Educación Primaria. Esto nos proporcionaría una visión global y temporal de cómo aparece, se desarrolla y consolida la habilidad de resolver problemas aritméticos.

Se debe evitar que la instrucción que se proporcione no resulte excesivamente compleja y rígida. Resulta difícil acotar cómo un material estructurado puede ayudar a resolver tareas complejas que pueden ser resueltas con procedimientos espontáneos y más sencillos. Nos atrevemos a afirmar que los problemas sencillos y al alcance de la mente infantil no necesitan de «entrenamiento complejo», sino de conexión del profesor con los procedimientos espontáneos que los niños ya traen a la escuela y enriquecer la transformación de esos procedimientos espontáneos a procedimientos formales.

Conectando con el punto anterior, puede considerarse que la enseñanza de nuevos métodos tiene el peligro de interferir con otros procedimientos que los niños ya poseen. Esto ha ocurrido

con algunos de los problemas entrenados en las categorías de Igualación y Comparación. Por lo tanto, la introducción de los procedimientos más complejos como los propuestos en el PIRPAEVSO debe hacerse cuando se fracase con los procedimientos más sencillos. Haciendo ver las posibles alternativas para resolver un mismo problema (flexibilidad de la estrategia), al tiempo que se intenta conseguir un total dominio de la nueva estrategia (consolidación). Si no es así, se corre el peligro de que ambos procedimientos interfieran y se produzcan resultados contradictorios. Esto nos sugiere de nuevo la necesidad de un mayor tiempo y práctica de aplicación.

Una limitación considerable sobre el uso por los niños de las estrategias entrenadas para cada categoría es el hecho de que éstas son dadas de forma externa. Nuestro estudio no pone énfasis en procesos constructivos. Pensamos que debiera investigarse algún modelo del proceso de construcción por los niños de sus propias estrategias y el uso flexible de las mismas. Esta investigación puede iniciarse con sujetos expertos, averiguando la pericia de este tipo de sujetos en la construcción de sus propias estrategias originales. De esta forma sabríamos el tipo de conocimiento (cómo se organiza el conocimiento, interconexiones con otros problemas, conocimiento conceptual ...) que está detrás de la creación de estrategias originales y podría estudiarse la manera de fomentar este tipo de conocimientos en otros sujetos. Cuando un niño modifica o reestructura su esquema mental con sus propias representaciones para los problemas, podría llegar a ser un sujeto experto.

Hemos encontrado al aplicar el PIRPAEVSO que unos diagramas (usados en la denominada Fase de Diagramas) son más claros que otros para representar la estructura y categoría semántica del problema. Es lo que se ha dado en llamar «transparencia de una representación» (Maza, 1995) considerada como condición necesaria para configurar una secuencia de aprendizaje, aunque no suficiente. Esto último lo sería cuando garantizase que el proceso de solución de un problema por la representación diagramática se traslade a otro análogo. Esto ocurre en los diagramas que hemos elaborado y presentado en mayor medida en unos tipos que en otros. Por ejemplo, el diagrama usado para los problemas de cambio y de Combinación. Pensamos, tras la experiencia realizada, que las representaciones diagramáticas de los problemas de Isomorfismo de Medidas son menos claras que las de otras categorías, aunque los resultados encontrados también sean positivos.

Referencias

- Aguilar, M. (1996). *Diseño y aplicación de un programa instruccional de resolución de problemas aritméticos*. Tesis doctoral. Cádiz: Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Aizpún, A., Casals, M. y Suárez, J. J. (1994). Perspectivas del aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria. (pp. 187-237). En J. Yagüe (Dir.) *Los aprendizajes Instrumentales en la Educación Primaria*. Madrid: Escuela Española.
- Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*. 51, (3-4) 533-552.
- Bethencourt, J. T. (1985). Estrategias cognitivas en la resolución de problemas aritméticos. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.
- Bishop, A. J., Clements, K., Kilpatrick, Ch. y Laborde, C. (Eds.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrech: Kluwer.
- Bujanda, M. P. (1993). *Matemáticas. Primaria 3*. Madrid S.M.
- Carpenter, T. P., Lindquist, M.M. Matthews, W. y Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*. 76(9), 652-659.
- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Beginning First Graders' Initial Representation of Arithmetic Word Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*. 4, 3-21.
- De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problem on children's problem representations and solution. *Journal of Educational Psychology*. 77, 460-470.
- De Corte, E., Verschaffel, L. y Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solution of multiplication problems. *Journal of Mathematical Behavior*. 7, 197-216.

- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. (pp. 244-275). En D. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- García, P. (1993). *Matemáticas. Animales y plantas. La tierra y el agua. El paisaje y los trabajos*. Madrid: Santillana.
- Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. (pp. 276-295). En D. A. Grouws (Dir.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Grouws, D. A. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, Macmillan.
- Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1996). *Evaluación de la Educación Primaria. Informe preliminar*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría de Estado de Educación.
- Kintsch, W. y Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems, *Psychological Review*, 92, 109-129.
- Lester, F. K., Garofalo, J. y Krool, D. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem-Solving: A Study of Two Grade Seven Classes*. Informe final del National Science Foundation NSF project MDR 85-50346.
- Martínez, J. (1995). *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa desde el punto de vista de las categorías semánticas en 3º, 4º y 5º de EGB/Primaria*. Tesis Doctoral. Madrid: UNED.
- Martínez, J. (1999). Los problemas aritméticos elementales verbales en los libros de texto y en los cuadernos de trabajo de los alumnos. Lo que va de la EGB a la Primaria. *Tavira*, 15, 27-69.
- Maza, C. (1995). *Aritmética y representación. De la comprensión del texto al uso de materiales*. Barcelona: Paidós.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. Edición en castellano. *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática «THALES»; Sevilla, 1991.
- Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches, and Empirical Finding. En VV.AA. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. N.C.T.M. Reston: Erlbaum.
- Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds.) (1990). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (ICMI Study Series). Cambridge: Cambridge University Press.
- Polya, G. (1957). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puig, L y Cerdán, F.(1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Rabiejewska, B. y Szetela, W. (1988). *A study of problem solving in Poland and Canada*. En *Proceedings of 1987 Meeting of the International Commission for Study and Improvement of Mathematics Teaching (CIEAEM): The Role Errors Play in the Learning and Teaching of Mathematics*. Quebec, Canadá: Sherbrooke.
- Riley, M. S., Greeno, J.G. y Heller, J. I. (1983). The development of children's problem solving ability in arithmetic. (pp. 153-196). En H. P. Ginsburgh (Eds.) *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.
- Schmith, S. y Weiser, W. (1995). Semantic Structures of One-Step Problems Involving Multiplication or Division. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 55-72.
- Vergnaud, G.(1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México. Trillas.
- Verschaffel, L. y De Corte, E. (1993). Do non-semantic factors also influence the solution process of addition and subtraction word problems?. En H. Mandh, E. De Corte, N. Bennet, y H.F. Friederich, (Eds.). *Learning and Instruction. European Research in an International Context. Analysis of Complex Skills and Complex Knowledge Domains*. Oxford: Pergamon.
- Willis, G.B. y Fuson, K.C. (1988). Teaching children to use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word Problems. *Journal of Educational Psychology*, 80, 2, 192-201.

ANEXO 1

PROBLEMAS DE CAMBIO

1. G. Daniel tiene 156 pesetas. Su padre le da 125. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?
1. P. Tenía 4 pesetas y me dieron 3. ¿Cuántas tengo ahora?
2. G. Tenía 248 pesetas. Me gasté 115. ¿Cuántas pesetas me quedaron?
2. P. Daniel tiene 8 pesetas. Se gasta 3. ¿Cuántas pesetas le quedan?
3. G. Tenía 58 cromos. Después de jugar tenía 97. ¿Cuántos cromos gané?
3. P. Tenía 4 pesetas. Mi madre me da dinero. Ahora tengo 9 pesetas. ¿Cuántas pesetas me ha dado mi madre?
4. G. Tenía 153 pesetas. Después de comprar caramelos me quedaron 94 pesetas. ¿Cuánto dinero me gasté?
4. P. Tenía 7 cromos. Después de jugar me quedan 2. ¿Cuántos cromos he perdido?
5. G. Mi tío me da 125 pesetas. Con las que tengo reúno 217. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?
5. P. Mi tío me da 4 pesetas. Ahora tengo 7. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?
6. G. Andrés pierde jugando 43 cromos. Le quedan 72. ¿Cuántos cromos tenía antes de jugar?
6. P. He perdido jugando 3 cromos. Me quedan 5. ¿Cuántos tenía cuando empecé a jugar?

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

1. G. En el colegio hay 264 chicas y 234 chicos. ¿Cuántas chicas hay más que chicos?
1. P. En una tienda trabajan 5 hombres y 2 mujeres. ¿Cuántos hombres más que mujeres trabajan en esa tienda?
2. G. En una fábrica trabajan 163 obreros. En otra fábrica trabajan 158. ¿Cuántos obreros menos trabajan en la segunda fábrica?
2. P. Tengo 5 primos y 2 primas. ¿Cuántas primas menos que primos tengo?
3. G. La clase de 3º tiene 164 libros. La clase de 2º tiene 32 libros más que la clase de 3º. ¿Cuántos libros tiene la clase de 2º?
3. P. Tengo 6 pesetas, Mi hermano tiene 3 más que yo. ¿Cuántas pesetas tiene mi hermano?
4. G. Tengo 262 pesetas. Mi hermano tiene 18 pesetas menos que yo. ¿Cuántas pesetas tiene mi hermano?
4. P. Juani tiene 6 libros. Ana tiene 2 menos que ella. ¿Cuántos libros tiene Ana?
5. G. En el colegio hay 264 chicas. Hay 39 niñas más que niños. ¿Cuántos niños hay?
5. P. Tengo 6 lápices de colores. Tengo 4 más que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos tengo?
6. G. En la clase hay 238 lápices de colores. Hay 53 lápices menos que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos hay?
6. P. En un equipo hay 3 niñas, y hay 2 niñas menos que niños. ¿Cuántos niños hay en ese equipo?

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

1. G. Juan tiene 259 pesetas. Andrés tiene 193 pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene que tener Andrés para tener las mismas que Juan?

1. P. María tiene 5 cromos. Inés tiene 3. ¿Cuántos cromos más debe tener Inés para que tenga los mismos que María?
2. G. Inés tiene 162 cromos. María tiene 144. ¿Cuántos cromos tiene que perder Inés para tener los mismos que María?
2. P. Nicolás tiene 7 pesetas. Roberto tiene 5. ¿Cuántas pesetas se tiene que gastar Nicolás para tener las mismas que Roberto?
3. G. El Real Madrid ha marcado 89 goles. Si el Zaragoza marcara 22 goles más tendría los mismos que el Real Madrid. ¿Cuántos goles ha marcado el Zaragoza?
3. P. Rocío tiene 5 chicles. Si a Natalia le dan 2 chicles tiene los mismos que Rocío. ¿Cuántos chicles tiene Natalia?
4. G. En una tienda de chucherías hay 168 chicles. Si venden 23 caramelos quedan los mismos chicles que caramelos. ¿Cuántos caramelos hay?
4. P. Hay 5 sillas en el dormitorio. Si del salón quitaran 3 sillas quedarían las mismas que en el dormitorio. ¿Cuántas sillas hay en el salón?
5. G. Tengo 126 cromos. Si me dan 53 tengo los mismos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?
5. P. Yo tengo 1 peseta. Si me dieran 3 más tendría las mismas que Lidia. ¿Cuántas pesetas tiene Lidia?
6. G. Tengo 212 pesetas. Si me gasto 34 me queda el mismo dinero que a Jaime. ¿Cuánto dinero tiene Jaime?
6. P. Tengo 6 caramelos. Si doy 2 me quedo con los mismos que Luis. ¿Cuántos caramelos tiene Luis?

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN

1. G. En el Colegio hay 264 chicas y 234 chicos. ¿Cuántos niños hay en el colegio?
1. P. En una mesa están sentados 3 chicas y 2 chicos. ¿Cuántos niños hay?
2. G. En el colegio hay 564 alumnos. 315 de estos alumnos son niñas. ¿Cuántos son niños?
2. P. Tengo 7 caramelos. 3 son de menta y los demás son de fresa. ¿Cuántos caramelos son de fresa?

PROBLEMAS DE ISOMORFISMO DE MEDIDAS

1. G. El colegio va a comprar 150 bolígrafos. Cada bolígrafo cuesta 58 pesetas. ¿Cuánto costarán todos los bolígrafos?
1. P. 3 niños tienen 2 caramelos cada uno. ¿Cuántos caramelos tienen los 3 juntos?
2. G. Van a repartir 128 caramelos entre los 32 niños de la clase. Todos los niños reciben el mismo número de caramelos. ¿Cuántos caramelos le dan a cada niño?
2. P. Se reparten 8 caramelos entre 4 niños. Todos reciben el mismo número de chicles. ¿Cuántos chicles recibe cada niño?
3. G. Se van a guardar 240 chicles en bolsas. En cada bolsa caben 40 chicles. ¿Cuántas bolsas van a hacer falta?
3. P. Hay que guardar 6 bolígrafos en bolsas. En cada bolsa se guardan 3 bolígrafos. ¿Cuántas bolsas hacen falta?

PROBLEMAS DE ESCALARES GRANDES

1. G. En mi clase caben 30 niños. En el salón del Colegio caben 12 veces más niños. ¿Cuántos niños caben en el salón?

1. P. En el cristal de una ventana hay 2 moscas. En el otro cristal hay 3 veces más moscas. ¿Cuántas moscas hay en este cristal?
2. G. Nacho tiene 123 cromos. Tiene 3 veces más cromos que Víctor. ¿Cuántos cromos tiene Víctor?
2. P. En la mesa de la biblioteca se sientan 8 niños. Son 4 veces más que los niños que caben en un pupitre. ¿Cuántos niños se pueden sentar en un pupitre?
3. G. La entrada del cine cuesta 300 pesetas. Un chupa-chups cuesta 25 pesetas. ¿Cuántas veces más cuesta la entrada del cine que el chupa-chups?
3. P. Iván tiene 6 dedos abiertos. Borja tiene 2 dedos abiertos. ¿Cuántas veces más dedos abiertos tiene Iván que Borja?

PROBLEMAS DE ESCALARES PEQUEÑOS

1. G. En mi clase caben 30 niños, y caben 26 veces menos niños que en el salón del colegio. ¿Cuántos niños caben en el salón?
1. P. Tengo 2 caramelos, y tengo 3 veces menos caramelos que tú. ¿Cuántos caramelos tienes tú?
2. G. Nacho tiene 123 cromos. Marcos tiene 3 veces menos cromos que él. ¿Cuántos cromos tiene Marcos?
2. P. Puri tiene 8 pulseras. Antonia tiene 4 veces menos pulseras que Puri. ¿Cuántas pulseras tiene Antonia?
3. G. En el patio del Colegio caben 248 niños. En la clase de 3º caben 31 niños. ¿Cuántas veces menos niños caben en la clase de 3º que en el patio?
3. P. Aurelio tiene 6 pesetas. Pepi tiene 2. ¿Cuántas veces menos pesetas tiene Pepi que Aurelio?

PROBLEMAS DE PRODUCTO CARTESIANO

1. G. Una niña tiene 12 faldas y 8 blusas. ¿De cuántas maneras distintas puede combinarlas?
1. P. Hay 3 niñas y 2 niños. ¿Cuántas parejas distintas puedes formar?
2. G. Con los niños de la clase se pueden formar 224 parejas distintas de un niño y una niña. Hay en la clase 16 niñas. ¿Cuántos niños hay?
2. P. Un niño puede combinar sus camisas y pantalones de 6 formas distintas. Tiene 3 camisas. ¿Cuántos pantalones tiene?